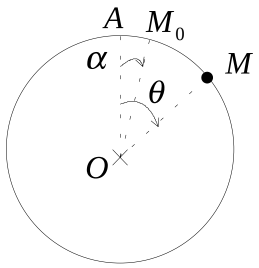
-EXERCICE 10.3-

• ENONCE :

« Point matériel glissant sur une sphère »



Un mobile (M), assimilé à un point matériel de masse m, de position initiale M_0 repérée par l'angle α , glisse sans frottements sur une sphère de rayon a.
La position de (M) est repérée, à un instant t quelconque, par l'angle θ .

1) Exprimer la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de g, a, α et θ (on supposera qu'à t=0, le point matériel (M) est immobile).
2) Exprimer la réaction $\vec{R}$ de la sphère sur le mobile (M) en fonction de g, m, α et θ .
3) Montrer qu'il existe un angle θ_1 pour lequel le point matériel quitte la sphère ; exprimer θ_1 en fonction de α , et calculer θ_1 pour $\alpha \simeq 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

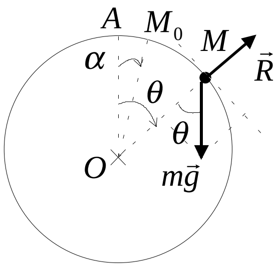
MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE

• CORRIGE :

« Point matériel glissant sur une sphère »

1)



Les forces appliquées au mobile (M) sont le poids $m\vec{g}$ et la réaction de la sphère $\vec{R}$.
Le PFD permet d'écrire: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$

Tant qu'il y a contact entre (M) et la sphère, le mouvement est circulaire, il est alors commode de projeter le PFD dans la base de Frenet, ce qui fournit:

♦ sur le vecteur tangent $\vec{\tau}$: $m\dfrac{dv}{dt} = mg\sin\theta$ (1)

♦ sur le vecteur normal $\vec{n}$: $m\dfrac{v^2}{a} = -R + mg\cos\theta$ (2) (où R est le module de $\vec{R}$)

• Dans un mouvement circulaire, on a : $v = a\times\dfrac{d\theta}{dt}$ $\Rightarrow$ on peut récrire la relation (1) :

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\sin\theta \;\Rightarrow\; \frac{d^2\theta}{dt^2}\times\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}\times\sin\theta\times\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{a}\times\frac{d(\cos\theta)}{dt} \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{a}\cos\theta + cste \text{ ; à } t=0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \text{ et } \theta = \alpha \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}(\cos\alpha - \cos\theta)} \quad (3)$$

Rq : lorsque l'aspect énergétique de la mécanique (chapitre 11) aura été vu, on remarquera qu'une méthode plus rapide consiste à appliquer la « conservation de l'énergie mécanique », puisqu'il n'y a pas de frottements ; on écrira alors :

$$E_C + E_P = cste \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\left(a\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mga\cos\theta = 0 + mga\cos\alpha$$

(origine de E_P au niveau du point O)

$\Rightarrow$ on retrouve bien $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dfrac{2g}{a}(\cos\alpha - \cos\theta)$, mais beaucoup plus simplement.

2) En injectant la relation (3) dans la relation (2), on obtient :

$$R = mg\cos\theta - ma\times\frac{2g}{a}\times(\cos\alpha - \cos\theta) \;\Rightarrow\; \boxed{R = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)}$$

3) Le contact entre le mobile et la sphère cesse lorsque la réaction s'annule, c'est-à-dire pour :

$$3\cos\theta_1 - 2\cos\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\cos\theta_1 = \frac{2}{3}\cos\alpha}$$

• Pour un angle initial $\alpha \simeq 0$, on a : $\cos\theta_1 \simeq \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_1 \simeq 48°11'}$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.